

MÉMOIRE DU DIPLÔME - DENS  
Introduction au domaine de recherche

# L'intégration $p$ -adique en géométrie énumérative

et son application à la symétrie miroir des espaces de fibrés de Higgs

Elsa Maneval



Mai 2024

## Résumé

L'intégration  $p$ -adique est un outil pour la géométrie algébrique et notamment la géométrie énumérative, un sous-domaine où l'on cherche à *compter des objets*. Cet outil est ce qui relie mon parcours mathématique. Je l'ai découvert dans mon stage de deuxième année, appliqué à la *théorie de Donaldson-Thomas*. Je l'explore maintenant avec les *espaces de fibrés de Higgs*. Enfin, je vais être amenée à l'utiliser et le développer pour d'autres applications encore lors de ma thèse. Cette introduction propose dans un premier temps un aperçu de ce qu'est la géométrie énumérative. Ensuite, j'introduis l'intégration  $p$ -adique, en vue d'expliquer son application à la symétrie miroir des espaces de fibrés de Higgs.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Tourner en rond</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>La géométrie énumérative</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>L'intégration <math>p</math>-adique</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Les espaces de modules de fibrés de Higgs</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Chronologie et perspectives</b>	<b>9</b>

## 1 Tourner en rond

*Combien y a-t-il de manières de tourner en rond dans un espace topologique  $X$  ?*

A première vue, le problème paraît mal posé pour au moins deux raisons : d'abord, il y a souvent une infinité de possibilités pour tourner en rond, et ensuite, il n'est pas clair que deux espaces topologiques homéomorphes amènent à la même réponse. Pourtant, nous connaissons tous une bonne réponse à ce problème.

Pour un espace topologique  $X$  connexe par arcs, on définit son groupe fondamental :

$$\pi_1(X) = \text{Hom}_{\text{Top}}(\mathbf{S}^1, X) / \sim_{\text{homotopie}}$$

Ce groupe répond bien à ma question pour au moins trois raisons :

- *Invariant*.  $\pi_1(X)$  est un invariant topologique.
- *Structure*.  $\pi_1(X)$  donne une réponse qui n'est pas une quantité, mais un ensemble muni d'une structure de groupe. Les lacets contenus dans  $X$  entretiennent des relations encodées dans  $\pi_1(X)$ .

---

L'illustration en couverture est une oeuvre d'art digital intitulée *The dark magic of integrable systems*, réalisée par Elliot Kienzle. Ses autres oeuvres sont disponibles [ici](#). Beaucoup sont en lien avec les espaces de modules de fibrés de Higgs.

- *Invariant numérique.* Selon la nature de  $X$ , on peut extraire de  $\pi_1(X)$  des nombres entiers liés à la forme de  $X$ . Par exemple, si  $X$  est une surface lisse, compacte et orientable,  $\pi_1(X)$  est généré par  $2g$  éléments où  $g$  est le genre de  $X$ .

*Espace des lacets.* On remarque que  $\pi_1(X)$  est construit à partir d'un autre espace topologique. L'espace des lacets, noté  $\Sigma_X$ , est l'ensemble  $\text{Hom}_{\text{Top}}(\mathbf{S}^1, X)$  muni de la topologie compacte-ouverte. Le groupe fondamental correspond à son ensemble de composantes connexes, ainsi  $\pi_1(X) = \pi_0(\Sigma_X)$ .

Mon cadre habituel n'est pas celui de la *topologie*, mais celui la *géométrie algébrique*. J'étudie des objets, appelés *schémas*, dont les briques de bases sont des espaces de solutions d'équations polynomiales. Ce cadre est plus rigide : deux schémas peuvent être homéomorphes en tant qu'espaces topologiques, sans être isomorphes comme schémas. Les seules applications continues considérées sont localement des polynômes ou des fonctions rationnelles.

*Quel serait l'analogue du  $\pi_1(X)$  en géométrie algébrique ?*

Prenons un schéma  $X$ . La première étape est de trouver l'**analogue du cercle  $\mathbf{S}^1$**  en géométrie algébrique. Or  $\mathbf{S}^1$  est la seule variété topologique connexe compacte de dimension 1. En géométrie algébrique, les bons objets de dimension 1 sont les courbes (irréductibles) lisses projectives. Même en fixant un genre  $g \geq 1$ , elles sont paramétrées par un schéma  $\mathcal{M}_g$  de dimension  $3g - 3$ .

Prenons  $\mathcal{C}$  parmi ces nombreuses courbes. Il nous faut alors construire un **analogue à l'espace des lacets  $\Sigma_X$** . Sous certaines conditions appliquées à  $X$  et à  $\mathcal{C}$ , on peut construire un *schéma de Hilbert*, noté  $\text{Hilb}_{[\mathcal{C}]}(X)$ . Chacun de ses points fermés correspond à un sous-schéma  $Y$  de  $X$  dont les caractéristiques topologiques sont les mêmes que celles de  $\mathcal{C}$ . Ces caractéristiques sont encodées dans le polynôme de Hilbert de  $Y$ , d'où le nom de ce schéma.

On veut maintenant tirer du schéma  $\text{Hilb}_{[\mathcal{C}]}(X)$  un **invariant** ayant une bonne structure, dont on peut extraire des invariant numériques. On peut simplement considérer la *cohomologie singulière* de  $\text{Hilb}_{[\mathcal{C}]}(X)$ . Elle est munie d'une structure d'algèbre graduée. On peut en extraire des invariants numériques comme la caractéristique d'Euler. Finalement, une réponse satisfaisante est donnée par cet objet :

$$H^*(\text{Hilb}_{[\mathcal{C}]}(X); \mathbb{Z})$$

Cependant, au lieu de considérer des sous-schémas  $Y$  de  $X$  qui ressemblent à  $\mathcal{C}$ , j'aurais pu considérer les plongements de  $\mathcal{C}$  dans  $X$ , en identifiant une classe appropriée de morphismes  $\mathcal{C} \rightarrow X$ . Il existe en fait plusieurs réponses correspondant à plusieurs théories. Un bon article d'exposition à ce sujet s'intitule *13/2 ways of counting curves* [PT14].

## 2 La géométrie énumérative

Plus généralement, la géométrie énumérative peut répondre dans le cadre algébrique à des problèmes comme :

*Combien y a-t-il de « trajectoires » ressemblant à  $Y$  dans  $X$  ?*

Selon ce qu'on met derrière le mot *trajectoire*, on étudiera des sous-schémas, des morphismes ou encore des faisceaux cohérents. Ce mot flou n'est pas choisi au hasard : une grande partie des objets et idées en géométrie énumérative viennent de la *physique théorique*, en particulier de la

*théorie des cordes*, où il s'agit vraiment de trajectoires de particules.

Comme en topologie, on cherche à construire des invariants contenant les informations sur notre problème de manière structurée. On peut résumer la recette que nous tentons en général d'appliquer pour notre problème.

1. *Construire un bon espace de module.* Rappelons que le groupe fondamental est construit à partir d'un espace topologique intermédiaire  $\Sigma_X$  paramétrisant les lacets dans  $X$ . En géométrie énumérative, une large part du travail est de construire des objets géométriques appelés *espaces de modules* dont nous voulons

- qu'ils *paramétrisent* les objets qui nous intéressent.
- qu'on puisse en tirer des invariants avec de bonnes structures. Ainsi, on préférera avoir un espace *compact et lisse*, par exemple de manière à disposer de la dualité de Poincaré.

Cette étape pose déjà problème dans de nombreux cas. Par exemple, l'espace de modules des courbes de genre  $g$ ,  $\mathcal{M}_g$ , n'est pas compact. Nous devons accepter un compromis, qui peut pencher dans deux directions.

- *Si l'on tient à paramétriser strictement les objets qui nous intéressent.* On se tourne vers les *champs algébriques*. Ce sont des objets qui encodent pour chaque point un groupe d'automorphismes. Ils ont plus de chance d'être lisses que les schémas de modules : sous certaines conditions, lors de passages au quotient, les stabilisateurs non triviaux ne génèrent pas de singularités.

En contrepartie, les champs sont moins faciles à manipuler que les schémas, puisque ce sont des *catégories fibrées en groupoïdes*, que l'on peut aussi voir comme des *2-foncteurs*.

- *Si l'on tient à obtenir un schéma lisse et projectif.* On cherche à compactifier les espaces de module, quitte à ce que la paramétrisation devienne plus difficile à décrire. Ainsi, on obtient une compactification  $\overline{\mathcal{M}}_g$  de  $\mathcal{M}_g$  en ajoutant certaines courbes ayant des singularités dites *nodales*.
2. *Construire des invariants.* On veut associer des invariants à notre espace de modules. Il y a de nombreux cas où les invariants classiques sont inadaptés ou inaccessibles. Il faut alors construire des complexes alternatifs, dans une *catégorie dérivée* et comprendre leur structure.
  3. *Construire des invariants numériques.* En général, la réponse à un problème énumératif est contenue dans la *cohomologie* de l'espace de module, mais celle-ci n'est pas entièrement connue. C'est le cas des schémas de Hilbert en général. Il faut donc calculer ou comparer directement certains *produits d'intersections*.

Dans le cas d'une variété  $X$  de dimension 3,  $\text{Hilb}_{[c]}(X)$  n'est pas lisse. En utilisant la catégorie dérivée, on peut construire un cycle appelé *classe fondamentale virtuelle*, dont il est possible d'extraire un nombre entier, appelé *invariant de Donaldson-Thomas*.

Notons pour finir que nous n'appliquons pas toujours cette recette pour obtenir un nombre qui répondrait à notre question de départ. En général, calculer un invariant numérique particulier n'est pas très intéressant. Ce qui compte, c'est de trouver les structures qui gouvernent ces invariants, et la manière dont ils reflètent des relations entre différents espaces. C'est précisément pour cela qu'on utilise l'*intégration  $p$ -adique*.

### 3 L'intégration $p$ -adique

Lorsque deux objets géométriques  $X$  et  $Y$  sont reliés, par exemple par un morphisme  $X \rightarrow Y$ , on veut souvent *comparer* leurs invariants. L'intégration  $p$ -adique est un moyen de définir de nouveaux invariants numériques qui sont facilement comparables dans ces situations. L'idée est ensuite de les relier aux autres invariants qui nous intéressent. Ce sont des *intermédiaires*.

**Les nombres  $p$ -adiques.** Rappelons quelques faits élémentaires. On obtient le corps des nombres  $p$ -adiques  $\mathbb{Q}_p$  en complétant  $\mathbb{Q}$  pour la norme  $p$ -adique. L'anneau des entiers  $p$ -adiques  $\mathbb{Z}_p$  est son anneau des entiers. C'est un anneau de valuation discrète, donc local. Ses deux idéaux propres sont l'idéal nul et son unique idéal maximal. Ils correspondent d'une part à l'inclusion  $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$  et d'autre part au quotient  $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ .

**Construction d'intégrales  $p$ -adiques.** Ces deux morphismes nous intéressent car en théorie des schémas, il est possible de changer d'anneau ou de corps de base le long d'un morphisme d'anneau. Très brièvement, on peut dire que la donnée d'un point est remplacée par celle de l'idéal des fonctions qui s'y annulent. Les morphismes d'anneaux respectent la structure d'idéal, donc on obtient une bonne functorialité.

Fixons une variété complexe lisse  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$  de dimension  $n$ . Dans certaines conditions, il existe :

- Une forme  $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}$  sur un anneau de nombres  $p$ -adiques  $\mathbb{Z}_p$ . Cela veut dire qu'en changeant de base  $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}$  suivant un morphisme  $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}$  on obtient  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ . On note  $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C} \simeq \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ .
- Une  $\mathbb{Q}_p$ -variété analytique lisse

$$\mathcal{M}^{an} := \mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

Il existe une mesure invariante par translation sur tout groupe localement compact appelée mesure de Haar. La mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  en est un exemple. On munit donc  $\mathbb{Q}_p$  de la mesure de Haar.

Si l'on dispose d'une  $n$ -forme volume sur  $\mathcal{M}^{an}$ , on obtient directement une mesure sur  $\mathcal{M}^{an}$ . Sinon, il est possible de coller des mesures locales en une mesure globale canonique  $\mu_{can}$  sur  $\mathcal{M}^{an}(\mathbb{Z}_p)$ . La notation  $\mathcal{M}^{an}(\mathbb{Z}_p)$  désigne les  $\mathbb{Z}_p$ -points de  $\mathcal{M}^{an}$ . Techniquement, ce sont des morphismes  $\text{Spec } \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{M}^{an}$ .

Pour une fonction  $\mathbb{Q}_p$ -analytique  $f : \mathcal{M}^{an} \rightarrow \mathbb{C}$ , on peut calculer l'intégrale  $p$ -adique :

$$\int_{\mathcal{M}^{an}(\mathbb{Z}_p)} f \mu_{can}$$

Ces intégrales nous fournissent des invariants numériques intéressants, pour deux raisons principales :

1. *Calculabilité.* Il existe un théorème de changement de variables. De plus, la mesure d'un fermé de Zariski est nulle.
2. *Intermédiaires.* Grâce au morphisme  $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ , on peut considérer

$$\mathcal{M}_{\mathbb{F}_p} := \mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$$

Ses  $\mathbb{F}_p$ -points forment un espace topologique composé d'un nombre fini de points. Or le volume  $p$ -adique est lié à ce nombre de points par la formule suivante, due à Weil [Wei82] :

$$\int_{\mathcal{M}^{\text{an}}(\mathbb{Z}_p)} \mu_{\text{can}} = \frac{\#\mathcal{M}(\mathbb{F}_p)}{p^{\dim(\mathcal{M})}} \quad (1)$$

Ces intégrales forment un intermédiaire entre caractéristique nulle et positive.

**Lien avec les nombres de Betti.** Les comptages de points sur les corps finis sont importants en géométrie algébrique, notamment grâce aux conjectures de Weil. Elles relient  $\#\mathcal{M}(\mathbb{F}_p)$  aux nombres de Betti  $b_i(\mathcal{M}_{\mathbb{C}})$ . La partie des conjectures de Weil que l'on utilise est la suivante. Elle est due à Dwork et Grothendieck.

### Conjectures de Weil

Soit  $\mathcal{M}$  une variété projective de dimension  $n$  définie sur  $\mathbb{Z}$ , lisse sur  $\mathbb{F}_q$ . Alors

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \#\mathcal{M}(\mathbb{F}_{q^n}) \cdot \frac{T^n}{n}\right) = \frac{P_1 \dots P_{2d-1}}{P_2 \dots P_{2d}}$$

où les  $P_i$  sont des polynômes en  $T$  de degré  $b_i(\mathcal{M}_{\mathbb{C}})$ , où  $b_i(\mathcal{M}) := \dim H^i(\mathcal{M}; \mathbb{Z})$ .

Nous voyons ainsi apparaître une première connexion entre des intégrales  $p$ -adiques et d'autres invariants numériques. Elle est au cœur d'un premier résultat obtenu avec l'intégration  $p$ -adique, concernant les nombres de Betti de variétés Calabi-Yau birationnelles.

**Définition.** Une variété  $X$  de dimension  $n$  est de **Calabi-Yau** si le fibré canonique  $K_X := \Omega_X^n$  (la  $n$ -ième puissance du fibré cotangent) est un fibré en droite trivial.

**Définition.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés algébriques irréductibles. Une **application rationnelle**  $X \dashrightarrow Y$  est un morphisme de schéma  $U \rightarrow V$  où  $U \subseteq X$  ouvert non vide et  $V \subseteq Y$  ouvert. Une **application birationnelle** est une application rationnelle  $f : X \dashrightarrow Y$  telle qu'il existe une application rationnelle inverse.

### Théorème de Batyrev [Bat99]

Si  $X$  et  $Y$  sont des variétés algébriques Calabi-Yau birationnelles lisses et projectives, alors elles ont les mêmes nombres de Betti.

Voici la stratégie de la preuve, qui sera reprise et modifiée par la suite pour d'autres contextes.

- $X, Y$  **se ressemblent**, il existe des ouverts  $U \subset X$  et  $V \subset Y$  tels que  $U \simeq V$ .  
Or, le volume  $p$ -adique du complémentaire de  $U$  dans  $X$  et de  $V$  dans  $Y$  est nul, car c'est un fermé de Zariski.
- Par changement de variables le long d'un isomorphisme, on obtient que  $X$  et  $Y$  ont le **même volume  $p$ -adique**.

On a utilisé la trivialité du fibré canonique pour comparer le tiré en arrière de la mesure de  $Y$  sur  $X$  avec la mesure de  $X$ .

- Grâce à la formule de Weil (1), on obtient que  $X$  et  $Y$  ont le **même nombre de  $\mathbb{F}_q$ -points**, pour une tour de corps infinie  $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q^2} \subset \dots \subset \mathbb{F}_{q^n} \subset \dots$ .
- Les conjectures de Weil permettent de conclure que  $X$  et  $Y$  ont les **mêmes nombres de Betti**.

## 4 Les espaces de modules de fibrés de Higgs

Dans cette section, je présente un exemple plus récent d'application de la stratégie d'intégration  $p$ -adique. Cet exemple concerne la symétrie miroir des espaces de modules de fibrés de Higgs. Je commence donc par motiver l'étude de ces espaces.

**Genèse des fibrés de Higgs.** Les *équations d'Hitchin* sont obtenues en ajoutant une invariance par translations dans deux directions aux *équations de Yang-Mills*. Pour une surface de Riemann  $\mathcal{C}$ , l'ensemble de solutions des équations d'Hitchin est en bijection avec certains  $G$ -fibrés principaux sur  $\mathcal{C}$  munis d'une section, appelés *fibrés de Higgs*.

Fixons une courbe lisse projective  $\mathcal{C}$  de genre  $g \geq 2$  sur  $\mathbb{C}$ .

Définition : fibré de Higgs

Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire. Un  $G$ -fibré de Higgs est une paire  $(E, \phi)$  où  $E$  est un  $G$ -fibré principal sur  $\mathcal{C}$  et  $\phi$  est une section de  $Ad(E) \otimes K_{\mathcal{C}}$  où  $Ad(E)$  est le fibré obtenu par extension via la représentation adjointe de  $G$  dans son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Une motivation pour la définition de ces objets est le **théorème de Narasimhan-Seshadri**, qui énonce que les *fibrés vectoriels stables* de degré 0 sur  $\mathcal{C}$  sont en bijection avec les *représentations unitaires* de  $\pi_1(\mathcal{C})$ .

Cette correspondance s'étend aux fibrés de Higgs. En effet, les  $GL_n$ -fibrés de Higgs *semi-stables* sont en bijection avec les *représentations semi-simples* de  $\pi_1(\mathcal{C})$ . Il s'agit de la **correspondance de Hodge non-abélienne**.

Il existe un espace de modules  $\mathcal{M}_{GL_n}^0$  qui paramétrise les  $GL_n$ -fibrés de Higgs semi-stables de degré 0 sur  $\mathcal{C}$ . On construit aussi l'espace de module des représentations de  $\pi_1(\mathcal{C})$ , noté  $\mathcal{R}_n$ . La correspondance de Hodge non-abélienne se traduit par un difféomorphisme  $\mathbb{R}$ -analytique

$$\text{NAHI} : \mathcal{M}_{GL_n}^0 \simeq_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_n$$

Par contre, en tant que variétés algébriques complexes, ces deux objets sont très différents, puisque  $\mathcal{R}_n$  est affine mais pas  $\mathcal{M}_{GL_n}^0$ .

Par ailleurs, il existe un espace affine  $\mathcal{A}$  et un morphisme très particulier

$$h : \mathcal{M}_{GL_n}^0 \rightarrow \mathcal{A}$$

Ce morphisme, appelé **fibration de Hitchin**, est donné par le polynôme caractéristique de la section  $\phi$  du fibré de Higgs. Outre ses propriétés *symplectiques* remarquables,  $h$  induit une filtration dite *perverse* sur la cohomologie de  $\mathcal{M}_{GL_n}^0$ .

En étudiant la cohomologie de la variété de caractères  $\mathcal{R}_n$ , Hausel et Rodriguez-Villegas ont démontré qu’il existe un *isomorphisme curieux* : il s’agit d’un isomorphisme de Lefschetz difficile, alors que celui-ci n’existe pas en général pour les variétés affines [HR08].

La **conjecture**  $P = W$ , aujourd’hui démontrée par trois méthodes différentes, explique cet isomorphisme par la correspondance de Hodge non-abélienne. NAHI transporte en fait la *filtration perverse* de la cohomologie de  $\mathcal{M}_{\mathrm{GL}_n}^0$  vers la *filtration de poids* de celle de  $\mathcal{R}_n$ , venant de la structure de Hodge mixte, une généralisation de la structure de Hodge aux variétés affines. Cela induit l’*isomorphisme de Lefschetz difficile curieux*.

La variété riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$ <sup>1</sup> sous-jacente à  $\mathcal{M}_{\mathrm{GL}_n}^0$  et  $\mathcal{R}_n$  a la propriété d’être hyperkählérienne. Cela signifie qu’il y a trois structures complexes  $I, J, K$  telles que  $IJ = K$  telles que  $(\mathcal{M}, g, I), (\mathcal{M}, g, J), (\mathcal{M}, g, K)$  sont kählériennes. Ainsi, la même variété différentielle donne lieu a des variétés algébriques  $\mathcal{M}_{\mathrm{GL}_n}^0 = (\mathcal{M}, I)$  et  $\mathcal{R}_n = (\mathcal{M}, J)$  très différentes mais difféomorphes.

Pour en savoir plus sur la géométrie riche de cette variété et sur les conjectures  $P = W$ , deux références introductives sont respectivement [Nei16] et [Fel23].

**Symétrie miroir** La fibration de Hitchin  $h : \mathcal{M}_{\mathrm{GL}_n}^0 \rightarrow \mathcal{A}$  existe plus généralement pour des espaces de modules  $\mathcal{M}_G$  de  $G$ -fibrés de Higgs pour  $G$  groupe algébrique. Elle est donnée par les polynômes invariants (par l’action du groupe de Weyl) de l’algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . Une paire duale de Langlands  $G$  et  $\hat{G}$  partage la même algèbre de Lie, les mêmes polynômes invariants et donc la même base de Hitchin  $\mathcal{A}_G$ . Les fibres aussi sont étroitement reliées. En effet, les fibres génériques sont des variétés abéliennes duales. Cela signifie qu’un point de l’une correspond à un fibré en droite sur l’autre.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_G & & \mathcal{M}_{\hat{G}} \\ & \searrow h_G & \swarrow h_{\hat{G}} \\ & \mathcal{A}_G & \end{array}$$

On dit que cette paire de fibrations forme un *système de Hitchin dual*. Cette structure fait de  $\mathcal{M}_G$  et  $\mathcal{M}_{\hat{G}}$  des exemples prototypiques de **paires de symétrie miroir** au sens de *Strominger, Yau et Zaslow* (SYZ). La symétrie SYZ des espaces de fibrés de Higgs serait une réduction de la  $S$ -dualité dans la théorie de Yang-Mills [Hau21].

De plus,  $\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_2}$  et  $\mathcal{M}_{\mathrm{PGL}_2}$  satisfont un test de *symétrie miroir topologique* modifié [HT03] : il s’agit d’une égalité de nombres de Hodge mixtes :

$$h^{p,q}(\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_2}^d) = h_{st}^{p,q}(\mathcal{M}_{\mathrm{PGL}_2}^e)$$

L’indice  $st$  pour *string* correspond à une modification des nombres de Hodge pour les variétés singulières que l’on retrouve souvent en symétrie miroir. Cette égalité est importante pour deux raisons :

1. Elle est inattendue du point de vue de la géométrie algébrique, car elle repose sur une certaine compatibilité de l’action de deux groupes très différents :  $\mathbb{C}^*$  et un groupe fini  $\Gamma$  sur  $H^*(\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_2}; \mathbb{Z})$ .

---

1. Ici,  $g$  est la métrique Riemannienne.

2. Elle fait de  $\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_2}$  et  $\mathcal{M}_{\mathrm{PGL}_2}$  l'un des premiers exemples de paires vérifiant à la fois le test de symétrie miroir topologique et la symétrie miroir SYZ.

La conjecture de cette égalité de symétrie miroir en rang  $n > 2$  a pu être démontrée grâce à l'intégration  $p$ -adique.

**Théorème de symétrie miroir topologique des espaces de fibrés de Higgs [GWZ20b]**

Considérons l'espace de module lisse  $\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_n}^d$  des  $\mathrm{GL}_n$ -fibrés de Higgs  $(E, \phi)$  semi-stables tels que  $\mathrm{tr} \phi = 0$  et de déterminant  $\Lambda^n E \simeq L$  fixé, de degré  $d$  premier à  $n$ .

Considérons également  $\mathcal{M}_{\mathrm{PGL}_n}^e$ , l'espace grossier associé au champs quotient  $[\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_n}^e/\Gamma]$ , où  $\Gamma = \mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})[n] \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$  agit par tensorisation sur les fibrés.

Pour tous  $p, q \in \mathbb{Z}$ , l'identité suivante est vérifiée :

$$h^{p,q}(\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_n}^d) = h_{st,\alpha^d}^{p,q}(\mathcal{M}_{\mathrm{PGL}_n}^e)$$

*Esquisse de démonstration.*  $\mathcal{M}_{\mathrm{PGL}_n}^e$  est un quotient d'une variété lisse par un groupe abélien fini : c'est une variété singulière *orbifold*. Les nombres de Hodge mixtes sont bien définis pour les variétés singulières, mais la symétrie miroir apparaît sur une version modifiée de ces invariants numériques. En effet, on opère une modification *stringy*, en plus de tordre les coefficients de la cohomologie par une *gerbe*  $\alpha$ . Ces modifications font toutes la subtilité de la preuve, dont la stratégie ressemble par ailleurs à celle de Batyrev.

- $\mathcal{M}_{\mathrm{PGL}_n}^e$  et  $\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_n}^d$  sont comparables grâce à la fibration de Hitchin.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathrm{SL}_n}^d & & \mathcal{M}_{\mathrm{PGL}_n}^e \\ & \searrow^{h_{\mathrm{SL}_n}} & \swarrow_{h_{\mathrm{PGL}_n}} \\ & \mathcal{A}_G & \end{array}$$

Les fibres génériques sont duales en tant que variétés abéliennes, et reliées par une isogénie. Comme les fermés de Zariski ont mesure nulle, on peut se débarrasser des fibres non génériques et obtenir par changement de variables une **égalité de volume  $p$ -adique**, pour un corps  $p$ -adique  $F$  bien choisi.

$$\int_{\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_n}^d(\mathcal{O}_F)} f_{\alpha^e_{\mathrm{SL}_n}} d\mu_{orb} = \int_{\mathcal{M}_{\mathrm{PGL}_n}^e(\mathcal{O}_F)} f_{\alpha^d_{\mathrm{PGL}_n}} d\mu_{orb}$$

Dans l'équation,  $f_{\alpha^e_{\mathrm{SL}_n}}$  correspond à la modification induite par la présence de la gerbe, il s'agit de son invariant de Hasse.

- En utilisant une généralisation de l'égalité (1) de Weil, on obtient que les deux variétés ont le **même comptage tordu de  $\mathbb{F}_q$ -points**, où  $\mathbb{F}_q$  est le corps résiduel de  $F$ .

$$\#\alpha^e_{\mathrm{SL}_n}(\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_n}^d(\mathbb{F}_q)) = \#\alpha^d_{\mathrm{PGL}_n}(\mathcal{M}_{\mathrm{PGL}_n}^e(\mathbb{F}_q))$$

- Le comptages de  $\mathbb{F}_q$ -points sont les traces des opérateurs Frobenius sur la cohomologie  $\ell$ -adique. Le fait de contrôler l'action des Frobenius pour une infinité de premiers  $p$

contraint la décomposition semi-simple de la cohomologie  $\ell$ -adique en tant que représentation galoisienne. Or, grâce à la théorie de Hodge  $p$ -adique, on sait que les multiplicités de ces représentations sont égales aux nombres de Hodge. On obtient ainsi une **égalité de nombres de Hodge stringy tordus**. Une bonne introduction à ce sujet est [Niz20].

□

## 5 Chronologie et perspectives

**Brève histoire.** La théorie moderne des courbes et surfaces définies par des polynômes irréductibles sur  $\mathbb{C}$  est développée depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. La *théorie des schémas* répond au besoin d’avoir un formalisme unifié pour traiter les équations à coefficients dans un anneau quelconque. Elle est développée dans les années cinquante et soixante, notamment par Grothendieck.

Les conjectures de Weil sont entièrement démontrées en 1974 par Deligne. On peut alors parler de l’espace topologique des  $\mathbb{C}$ -points d’un schéma défini sur  $\mathbb{Z}$  et du comptage de ses  $\mathbb{F}_q$ -points. La *cohomologie  $\ell$ -adique* et la *théorie de Hodge  $p$ -adique* permet aussi de relier ces comptages aux nombres de Hodge. Ils sont désormais disponibles pour toutes les variétés algébriques, et non plus seulement les variétés projectives lisses, grâce aux structures de Hodge mixtes définies par Deligne [Del71].

En parallèle, de nombreux espaces de modules sont construits comme schémas dès les années soixante (schémas de Hilbert, espaces de modules de fibrés semi-stables sur une courbe...).

L’utilisation de l’intégration  $p$ -adique en géométrie repose sur des résultats qui relient la caractéristique nulle aux caractéristiques positives. L’égalité de Weil (1) est une observation clé qui permet de lier les intégrales  $p$ -adiques aux comptages de  $\mathbb{F}_q$ -points. Batyrev est le premier à l’utiliser en géométrie algébrique, pour les variétés Calabi-Yau birationnelles [Bat99].

Depuis, l’intégration  $p$ -adique se développe en lien avec l’*intégration motivique*. Son utilisation sur les espaces de modules de fibrés de Higgs dans l’article [GWZ20b] est l’un des premiers exemples d’application en géométrie énumérative. Ce résultat s’appuie aussi sur de nombreux travaux sur les espaces de modules de fibrés de Higgs dans les trente dernières années, dans lesquels Hausel a joué un rôle particulièrement important.

**Mon projet ?** On aimerait étendre le résultat de symétrie miroir des espaces de modules de  $\mathrm{SL}_n$  et  $\mathrm{PGL}_n$ -fibrés de Higgs à d’autres paires de Langlands, comme  $\mathrm{SO}(2n+1)$  et  $\mathrm{Sp}(2n)$ . Cependant, cette généralisation pose de nombreuses difficultés. Ce qui permet à la preuve dans [GWZ20b] de fonctionner est la *lissité* de  $\mathcal{M}_{\mathrm{SL}_n}^d$  en tant que variété algébrique. Pour obtenir un espace de module lisse, on s’est restreint aux fibrés de Higgs *semi-stables*. En prenant un degré  $d$  premier avec  $n$ , la *stabilité* est équivalente à la *semi-stabilité*. Dans le cas général, la présence de fibrés strictement semi-stables empêche la lissité, et se restreindre aux fibrés stables est trop restrictif pour voir apparaître la symétrie miroir.

Comme pour le cas  $\mathrm{SL}_n$ ,  $\mathrm{PGL}_n$ , la symétrie miroir n’apparaît pas sur les nombres de Hodge mixtes de Deligne. De plus, la modification stringy telle qu’elle est utilisée pour  $\mathrm{SL}_n$  et  $\mathrm{PGL}_n$  n’est pas disponible lorsque les singularités sont pires que des singularités *orbifold*. Ce qui semble le plus prometteur à l’heure actuelle est d’étudier une autre cohomologie, la *cohomologie d’intersection*, construite dans la catégorie des faisceaux pervers [Mau21].

Pour continuer à utiliser l'intégration  $p$ -adique, on doit construire des mesures  $p$ -adiques plus générales, en utilisant la lissité du champs de modules. Il faut alors relier le volume  $p$ -adique ainsi obtenu à la trace de l'opérateur de Frobenius sur la cohomologie d'intersection. Ces enjeux constituent un aspect de mon projet de thèse, en lien avec un projet en cours de Groechenig, Wyss et Ziegler.

**Mais aussi...** Les méthodes d'intégration  $p$ -adique ne se limitent pas aux espaces de modules de fibrés de Higgs. Voici d'autres applications de l'intégration  $p$ -adique, très diverses.

- *La correspondance de McKay*. Il s'agit d'une philosophie. En géométrie algébrique, elle relie des invariants d'une variété  $V$  sur laquelle un groupe  $G$  agit et une résolution du quotient  $V/G$ . Denef, Loeser et Yasuda par exemple en ont prouvé des versions en la formulant comme une égalité d'intégrales motiviques ou  $p$ -adiques [DL00 ; Yas17].
- *Invariants énumératifs*. Les invariants de Donaldson-Thomas sont définis à l'origine comme le degré d'une classe fondamentale virtuelle dans l'homologie d'un espace de module de faisceaux au-dessus d'une variété fixée. On peut exprimer ces invariants comme des intégrales  $p$ -adiques [COW24].
- *Programme de Langlands*. En 2010, Ngô démontre le *lemme fondamental* conjecturé par Langlands en 1983 [Ngô10]. Grâce à plusieurs réductions, Ngô est arrivé à une formulation en terme de fibres de Hitchin et a montré un résultat de stabilisation qui implique le lemme. Groechenig, Wyss et Ziegler ont redémontré ce résultat en 2017 en utilisant l'intégration  $p$ -adique [GWZ20a].
- *Invariants de noeuds et singularités*. Une conjecture relie, pour une singularité de courbe plane donnée, des invariants issus d'une certaine cohomologie d'entrelacs à la géométrie de certains schémas de Hilbert. Ilaria Rossinelli a construit une formulation utilisant l'intégration  $p$ -adique, offrant une piste nouvelle pour ce type de conjectures [Ros].
- *Théorie géométrique des représentations*. Tanguy Vernet utilise des comptages similaires à l'intégration  $p$ -adique sur des espaces de modules de représentations de carquois, en exploitant la structure donnée par l'*application moment*. [Ver23].

## Remerciements

Ma quatrième année et ma thèse sont encadrées par Dimitri Wyss, à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Je le remercie vivement de m'avoir proposé ce sujet et encouragée à poursuivre en thèse.

J'ai aussi beaucoup appris en géométrie énumérative lors de mon stage de deuxième année encadré par Lim Woonam.

Enfin, je dois beaucoup à Nicolas Bergeron, qui a été mon tuteur pendant mes quatre années à l'ENS. Il m'a soutenue tout au long de mon parcours, donné envie de faire des mathématiques et aidé à y trouver ma place.

# Références

- [Bat99] Victor V. BATYREV. “Birational Calabi–Yau  $n$ -folds have equal Betti numbers”. In : *New Trends in Algebraic Geometry*. Sous la dir. de K. HULEK, M. REID, C. PETERS et F.Editors CATANESE. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1999, p. 1-12.
- [COW24] Francesca CAROCCI, Giulio ORECCHIA et Dimitri WYSS. *BPS invariants from  $p$ -adic integrals*. 2024. arXiv : [2112.12103](#) [[math.AG](#)].
- [Del71] Pierre DELIGNE. *Théorie de Hodge. I*. French. Actes Congr. Internat. Math. 1970, 1, 425-430 (1971). 1971.
- [DL00] Jan DENEFF et François LOESER. *Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence*. 2000. arXiv : [math/9903187](#) [[math.AG](#)].
- [Fel23] Camilla FELISETTI.  *$P = W$  phenomena in algebraic and enumerative geometry*. 2023. arXiv : [2309.15061](#) [[math.AG](#)].
- [GWZ20a] Michael GROECHENIG, Dimitri WYSS et Paul ZIEGLER. “Geometric stabilisation via  $p$ -adic integration”. In : *Journal of the American Mathematical Society* 33.3 (juin 2020), p. 807-873. ISSN : 1088-6834. DOI : [10.1090/jams/948](#). URL : <http://dx.doi.org/10.1090/jams/948>.
- [GWZ20b] Michael GROECHENIG, Dimitri WYSS et Paul ZIEGLER. “Mirror symmetry for moduli spaces of Higgs bundles via  $p$ -adic integration”. In : *Inventiones Mathematicae* 221 (juill. 2020), p. 505-596. DOI : [10.1007/s00222-020-00957-8](#). URL : <https://doi.org/10.1007/s00222-020-00957-8>.
- [Hau21] Tamás HAUSEL. *Enhanced mirror symmetry for Langlands dual Hitchin systems*. 2021. arXiv : [2112.09455](#) [[math.AG](#)].
- [HT03] Tamas HAUSEL et Michael THADDEUS. “Mirror symmetry, Langlands duality, and the Hitchin system”. In : *Inventiones Mathematicae* 153.1 (juill. 2003), p. 197-229. ISSN : 1432-1297. DOI : [10.1007/s00222-003-0286-7](#). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00222-003-0286-7>.
- [HR08] Tamás HAUSEL et Fernando RODRIGUEZ-VILLEGAS. “Mixed Hodge polynomials of character varieties : With an appendix by Nicholas M. Katz”. In : *Inventiones mathematicae* 174.3 (juin 2008), p. 555-624. ISSN : 1432-1297. DOI : [10.1007/s00222-008-0142-x](#). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00222-008-0142-x>.
- [Mau21] Mirko MAURI. “Topological mirror symmetry for rank two character varieties of surface groups”. In : *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 91.2 (août 2021), p. 297-303. ISSN : 1865-8784. DOI : [10.1007/s12188-021-00246-y](#). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s12188-021-00246-y>.
- [Nei16] Andrew NEITZKE. *Lecture notes : Moduli of Higgs Bundles*. 2016. URL : <https://gauss.math.yale.edu/~an592/exports/higgs-bundles.pdf>.
- [Ngô10] Baochâu NGÔ. “Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie”. fr. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 111 (2010), p. 1-169. DOI : [10.1007/s10240-010-0026-7](#). URL : <http://www.numdam.org/articles/10.1007/s10240-010-0026-7/>.
- [Niz20] Wiesław NIZIOŁ. *Hodge Theory of  $p$ -adic varieties : a survey*. 2020. arXiv : [2005.07919](#) [[math.NT](#)].
- [PT14] Rahul PANDHARIPANDE et Richard P. THOMAS. “ $13/2$  ways of counting curves”. In : *Moduli Spaces*. Cambridge University Press, mars 2014, p. 282-333. DOI : [10.1017/cbo9781107279544.007](#). URL : <http://dx.doi.org/10.1017/CB09781107279544.007>.
- [Ros] Ilaria ROSSINELLI. *Curvilinear Hilbert schemes and Algebraic Link Invariants of Plane Curve Singularities*. To appear.
- [Ver23] Tanguy VERNET. *Positivity for toric Kac polynomials in higher depth*. 2023. arXiv : [2310.02912](#) [[math.RT](#)].
- [Wei82] André WEIL. *Adeles and Algebraic Groups*. Birkhäuser Boston, 1982. ISBN : 9781468491562. DOI : [10.1007/978-1-4684-9156-2](#). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-9156-2>.
- [Yas17] Takehiko YASUDA. “The wild McKay correspondence and  $p$ -adic measures”. In : *Journal of the European Mathematical Society* 19.12 (nov. 2017), p. 3709-3743. ISSN : 1435-9863. DOI : [10.4171/jems/751](#). URL : <http://dx.doi.org/10.4171/JEMS/751>.